中心極限定理

statistical_physics/note/supp_central_limit_theorem.pages

x を確率変数として，x の平均値がm，分散がσ^2 とする．

いま，N 個の確率変数 $x_1, x_2, \ldots, x_N$ が同じ確率分布に従う場合を考える．このとき，

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_N$$

の平均値と分散は，次式で与えられる．

(1)
$$\langle X \rangle = Nm$$
$$\left\langle \left(X - \langle X \rangle \right)^2 \right\rangle = N\sigma^2$$

また，次の**中心極限定理**が成り立つ．

(2) $N \to \infty$ のとき，X は平均と分散が(1)のGauss分布に従う．

【式(1)の証明】平均の式は明らか．分散については，

$$\left\langle \left(X - \langle X \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \sum_{i,j} \langle x_i x_j \rangle - N^2 m^2$$

右辺第２項を計算すると

$$\sum_{i,j} \langle x_i x_j \rangle = \sum_i \langle x_i^2 \rangle + \sum_{i \neq j} \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle = \sum_i \langle x_i^2 \rangle + \left(\sum_{i,j} \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle - \sum_i \langle x_i \rangle^2 \right)$$
$$= N\left(m^2 + \sigma^2 \right) + \left(N^2 m^2 - N m^2 \right) = N\sigma^2 + N^2 m^2$$

よって

$$\left\langle \left(X - \langle X \rangle \right)^2 \right\rangle = \sum_{i,j} \langle x_i x_j \rangle - N^2 m^2 = N\sigma^2 + N^2 m^2 - N^2 m^2 = N\sigma^2$$

【中心極限定理(2)の証明】

$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_N = \sum_{j=1}^{N} x_j = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_N \right)$ が従う確率分布$P(X)$ を求める．

ステップ関数を$\theta(x)$ とすると，f がA 以下の値をとる確率は，次式で与えられる．

$$\left\langle \theta\left(A - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_N \right) \right) \right\rangle$$

したがって，f がX 以上，$X + dX$ 以下の値をとる確率$P(X)dX$ は

$$P(X)dX = \left\langle \theta\left(X + dX - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_N \right) \right) \right\rangle - \left\langle \theta\left(X - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_N \right) \right) \right\rangle$$

右辺をdXについて展開し，$\dfrac{d\theta(x)}{dx}=\delta(x)$を用いると

$$P(X)=\left\langle \delta\left(X-f\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\right)\right)\right\rangle$$

ここで $\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dk}{2\pi}e^{-ikx}$ を用いると

(3) $$P(X)=\left\langle \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\exp\left(-ik\left(X-f\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\right)\right)\right)\right\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ikX}\left\langle \exp\left(ikf\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\right)\right)\right\rangle$$

$f\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\right)=\sum_{j=1}^{N}x_j$ だから

(4) $$\left\langle \exp\left(ikf\left(x_1,x_2,\ldots,x_N\right)\right)\right\rangle=\left\langle \exp\left(ik\sum_{j=1}^{N}x_j\right)\right\rangle=\left\langle \exp\left(ikx_1\right)\right\rangle^N$$

最後の等式では$x_1,x_2,\ldots,x_N$が同じ確率分布に従うことを用いた.

$x_1=x$と書くと，$\langle x\rangle=m$，$\left\langle\left(x-\langle x\rangle\right)^2\right\rangle=\sigma^2$ より

$$\ln\left\langle \exp(ikx)\right\rangle=\ln\left(1+ik\langle x\rangle-\frac{1}{2}k^2\langle x\rangle^2+\ldots\right)=ik\langle x\rangle-\frac{1}{2}k^2\langle x\rangle^2+\ldots+\frac{k^2}{2}\langle x\rangle^2+\ldots$$
$$=imk-\frac{1}{2}\sigma^2k^2+\ldots$$

よって，式(3)と式(4)より

$$P(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ikX}\left\langle \exp(ikx)\right\rangle^N=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{-ikX}\exp\left(iNmk-\frac{1}{2}N\sigma^2k^2+\ldots\right)$$
$$\simeq\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\exp\left(i(Nm-X)k-\frac{1}{2}N\sigma^2k^2\right)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\exp\left(-\frac{1}{2}N\sigma^2\left(k-\frac{i(Nm-X)}{N\sigma^2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{(Nm-X)^2}{N\sigma^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(X-Nm)^2}{2N\sigma^2}\right)$$

ゆえに，Xが従う確率分布は，次のGauss分布となる.

(5) $$\boxed{P(X)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(X-Nm)^2}{2N\sigma^2}\right)}$$

参考文献：土井正男「統計力学」（朝倉書店，2006）